

# Úvod do fyziky hvězdných soustav

## 6 Fyzika dvojhvězd

6.1. Přítomnost planety Jupiter by bylo možné prokázat rozborem změn radiální rychlosti Slunce.

Vypočtěte periodu a amplitudu změn radiální rychlosti, jež by tato planeta mohla vyvolat. Diskutujte, zda jsou tyto variace současnou astronomickou technikou měřitelné. Čím by byli hendikepováni astronomové ze souhvězdí Draka nebo Mečouna?

[11,9 let, 25 m/s]

6.2. Galileovi se již v roce 1616 podařilo rozložit hvězdu Mizar na dvě složky. Měl s ním své úmysly – byla to dvojice, která byla (podle něj) mimořádně vhodná pro změření paralaxy. Dle jeho zápisků tam viděl dvě hvězdy s poloměry  $3''$  a  $1''$ , oddělené vzdáleností  $15''$ . Vzhledem k tomu, že Galileo předpokládal, že všechny hvězdy jsou zhruba stejně veliké (asi jako Slunce), měla by ta menší být třikrát dál, její paralaktická elipsa měla být třikrát menší.

Vypočtěte a) jakou paralaxu by za těchto okolností měly ony hvězdy a zda by byla měřitelná jejich vzájemná paralaxa (měřená vůči „vzdálenější“ složce). b) Proč toto měření selhalo? Kde byly chyby v předchozí úvaze?

[a)  $11'$ ,  $3,6'$  a  $7'$  – vše by bylo v té době pohodlně měřitelné, snad i pouhým okem. b) nevěděl o seeingu, o fyzických dvojhvězdách]

6.3. Určete dynamickou paralaxu a hmotnost složek vizuální dvojhvězdy 70 Ophiuchi. Velká poloosa trajektorie dvojhvězdy by byla viditelná pod úhlem  $4,551''$ , oběžná doba soustavy je 87,85 roku. Pozorované bolometrické hvězdné velikosti složek jsou 3,93 mag a 5,29 mag. Pro závislost mezi hmotností  $M$ , vyjádřenou v jednotkách hmotnosti sluneční a absolutní bolometrickou hvězdnou velikostí  $M_{\text{bol}}$  užití vztah:  $\log M = 0,56 - 0,12 M_{\text{bol}}$ . (Převzato ze sbírky J. Široký, M. Široká: *Základy astronomie v příkladech*, úloha 238).

[Poslední aproximace:  $\pi = 0,210''$ ,  $0,79 M_{\odot}$  a  $0,54 M_{\odot}$ ]

6.4. Třetí nejjasnější hvězda severní oblohy je Capella ( $\alpha$  Aurigae). Je to vlastně spektroskopická a vizuální dvojhvězda sestávající ze dvou obřích hvězd spektrálního typu G8 III (složka 1) a G1 III (složka 2). Ve spektru dvojhvězdy lze bez problému vysledovat dva systémy čar, které se vůči sobě pohybují v antifázi s periodou  $P = 104,0233$  dne. Křivky radiálních rychlostí jsou perfektní sinusoidy. První složka vykazuje poloviční amplitudu změn radiální rychlosti  $K_2 = 26,05$  km/s, druhá složka má  $K_2 = 27,4$  km/s. Interferometricky lze spolehlivě proměřit vzájemný pohyb složek. Ztotožníme-li střed měření s jednou ze složek, pak ta druhá opisuje dokonalou elipsu o velké poloose  $0,05647''$  a malé poloose  $0,04142''$ . Nepřekvapuje (a proč?), že „nepohyblivá“ složka leží ve středu této elipsy.

Vypočtete: b) poměr hmotností složek  $M_2/M_1$ , c) úhel sklonu dráhy  $i$ , d) oběžné rychlosti obou složek vztahované k těžišti  $v_1, v_2$ , e) poloměry jejich drah vůči těžišti  $r_1, r_2$ , f) velkou poloosu  $a$  v m a AU, g) celkovou hmotnost soustavy s  $M_\odot$ , h) hmotnosti jednotlivých složek  $M_1, M_2$ , i) vzdálenost Capelly v pc a světelných letech.

[(a) trajektorie jsou kružnice, (b)  $M_2/M_1 = 0,9507$ , (c)  $i = 137,18^\circ$ , (d)  $v_1 = 38,33$  km/s,  $v_2 = 40,31$  km/s, (e)  $r_1 = 5,4822 \cdot 10^{10}$  m,  $r_2 = 5,7663 \cdot 10^{10}$  m, (f)  $a = 1,1249 \cdot 10^{11}$  m = 0,7519 AU, (g)  $M_1 + M_2 = 5,24 M_\odot$ , (h)  $M_1 = 2,69 M_\odot$ ,  $M_2 = 2,55 M_\odot$ , (i) 13,3 pc.]

6.5. U zákrytové dvojhvězdy V 442 Cygni s periodou světelných změn  $P = 2,386$  dne dochází k centrálním zákrytům, přičemž částečné zatmění trvá 6,3 h, úplné 0,7 h. Ve spektru soustavy jsou patrné čáry obou složek, křivky radiálních rychlostí jsou přesné sinusoidy. Poloviční amplituda změn radiální rychlosti primární složky je  $K_1 = 109$  km/s, poloviční amplituda změn z radiální rychlosti sekundární složky je 120 km/s.

Z tohoto zadání úlohy zjistěte: a) vzdálenost složek v AU a poloměrech Slunce, b) hmotnosti soustavy a jednotlivých složek, c) poloměry  $R_1$  a  $R_2$  obou složek. Jedná se o oddělenou soustavu?

[(a)  $a = 0,050$  AU = 10,8  $R_\odot$ , (b)  $M_1 = 1,56 M_\odot$ ,  $M_2 = 1,41 M_\odot$ , (c)  $R_1 = 2,07 R_\odot$ ,  $R_2 = 1,66 R_\odot$ ]

6.6. Pro dvojhvězdu sestávající ze složek o hmotnosti  $5 M_\odot$  a  $3 M_\odot$  vypočtete nejdelší oběžnou periodu  $P_{\max}$ , při níž dojde k přetoku látky z primární složky na sekundární ještě v době, kdy a) jsou obě hvězdy objekty hlavní posloupnosti ( $R_{1\max} = 5 R_\odot$ ), b) primární složka je červeným obrem a sekundární hvězdou hlavní posloupnosti ( $R_{1\max} = 500 R_\odot$ ), c) primární složka je červeným obrem asymptotické větve a sekundární hvězdou hlavní posloupnosti ( $R_{1\max} = 1000 R_\odot$ ). Trajektorie dvojhvězd předpokládejte kruhové.

[Aby došlo k přetoku, musí maximální poloměr primární složky  $R_{1\max}$  přesáhnout poloměr jejího Rocheova laloku  $R_{1L}$ :

$$\left(\frac{R_{1\max}}{R_\odot}\right) \geq \left(\frac{R_{1L}}{R_\odot}\right) = 0,52 \left(\frac{a}{R_\odot}\right) \left(\frac{M_1}{M_1 + M_2}\right)^{0,44} =$$

$$0,52 \cdot 4,209 \cdot \left(\frac{M_1 + M_2}{M_\odot}\right)^{1/3} \left(\frac{M_1}{M_1 + M_2}\right)^{0,44} \left(\frac{P}{1d}\right)^{2/3} \rightarrow P_{\max} = \left(\frac{R_{1\max}}{3,55 R_\odot}\right)^{3/2}.$$

a) 1,7 dne, b) 4,6 let, c) 13 let.]

## 7 Fyzika proměnných hvězd

7.1. Seřad'te podle proměnářské abecedy hvězdy s tímto písmenným, či číselným označením: A, AA, AB, BA, QQ, QZ, R, RS, ZZ, V 249, V 378.

7.2. a) Dokažte, že jsou-li relativní změny jasnosti  $\Delta j/j$  dostatečně malé, lze je a odpovídající změnu hvězdné velikosti v magnitudách  $\Delta m$  zapsat:  $-1,086 \Delta j/j = \Delta m$ . b) Při jakém rozdílu hvězdných velikostí dostoupí chyba aproximace 1 %?

[(a)  $\log e/0,4 = 1,086$ , (b) 0,022 mag ]

7.3. Kolem Slunce prolétává prostorovou rychlostí 300 km/s rotující proměnná hvězda, jejíž doba otočky 2,45002 dne se dlouhodobě nemění. a) Popište, jak asi se bude měnit délka pozorované periody. Vypočítejte její hodnotu b) dlouhou dobu před největším přiblížením, c) v době největšího přiblížení, d) dlouho po největším přiblížení. Předpokládejte, že pohyb proměnné hvězdy vzhledem ke Slunci je rovnoměrný a přímočarý.

[(b) 2,44757 d, (c) 2,45002 d, (d) 2,45247 d]

7.4. U hvězdy CQ UMa byla původně nalezena perioda světelných změn o délce 1,68186 dne. Později se ukázalo, že správná je konjugovaná perioda. Vypočítejte pomocí Tannerova vztahu délku této periody. Jak byste vedli pozorování, abyste si ověřili, která z těchto period je reálná a která fiktivní. [2,45003 d]

7.5. V  $O-C$  diagramu algolidy lze vysledovat víceméně parabolický nárůst ( $O-C$ ) na epoše  $E$ . Jak byste tento chod interpretovali. Jak lze tento průběh vysvětlit?

[Je to důsledek vzrůstu fotometrické periody. Ta může odrážet jak skutečný nárůst orbitální periody, tak i skutečnost, že zmíněná algolida se od nás vzdaluje v důsledku gravitačního působení třetí složky. Budeme-li pozorovat dostatečně dlouho, pak by změny  $O-C$  měly mít cyklický charakter s periodou vzájemného oběhu soustavy algolidy kolem společného těžiště s třetí složkou.]

7.6. Algolidy jsou zákrytové dvojhvězdy, jejichž jasnost se mezi zákryty prakticky nemění. Vysvětlete, jak je možné, že se mezi algolidy počítají i takové soustavy, kde jedna ze složek vyplňuje Rocheův lalok a její tvar se tedy velmi výrazně odchyluje od koule. Je-li celková jasnost soustavy mimo zákryty součtem jasností obou složek, proč nepozorujeme silné změny v důsledku její kapkovitosti?

[Sekundární složky takovýchto systémů přispívají k celkové jasnosti soustavy jen několika procenty a relativní změny jasnosti soustavy dané jejich změnami bývají zanedbatelné.]

7.7. Je možné, aby v jistém okamžiku nabyla hodnota relativního čísla  $R$  hodnoty 7? Je myslitelné, aby byl týdenní průměr  $R$  roven 7?

7.8. Představte si dvě soustavy: oddělenou, sestávající ze dvou hvězd hlavní posloupnosti, a polodotkovou, sestávající z relativně chladnějšího podobra vyplňujícího svůj Rocheův lalok a primární složky, žhavé hvězdy hlavní posloupnosti. Která ze zákrytových soustav bude vykazovat větší amplitudu světelných změn a proč? Jak se vzájemně liší světelné křivky těchto proměnných hvězd?

[V druhém případě pozorujeme poměrně hluboké primární minimum a nevýrazné sekundární, v prvním případě jsou obě minima srovnatelně mělká, amplituda není vyšší než 1 mag.]

7.9. Jistý eruptivní trpaslík má v klidu 15. absolutní velikost. Během vzplanutí se zjasní o 4,3 magnitudy. O kolik magnitud by se změnila hvězdná velikost Slunce, pokud by na něm proběhla tatáž erupce? Jaká je šance, že bychom podobný nárůst zachytili fotometricky?

[0,0045 mag, velmi malá]

7.10. Odhadněte a porovnejte mezi sebou střední hustoty a základní periody radiálních pulsací a) typické neutronové hvězdy  $M = 1,3 M_{\odot}$ ,  $R = 14$  km, b) typického bílého trpaslíka  $M = 0,56 M_{\odot}$ ,  $R = 8\,800$  km, c) Slunce, d) proměnné typu  $\delta$  Sct -  $M = 2,1 M_{\odot}$ ,  $R = 1,7 R_{\odot}$ , e) klasické cefeidy  $M = 6 M_{\odot}$ ,  $R = 70 R_{\odot}$ , f) typické miridy  $M = 1,1 M_{\odot}$ ,  $R = 600 R_{\odot}$ .

[(a)  $\rho = 2,3 \cdot 10^{17}$  kg/m<sup>3</sup>,  $P_z = 2,6 \cdot 10^{-4}$  s, (b)  $\rho = 3,9 \cdot 10^8$  kg/m<sup>3</sup>,  $P_z = 6,2$  s, (c)  $\rho = 1410$  kg/m<sup>3</sup>,  $P_z = 54$  min, (d)  $\rho = 600$  kg/m<sup>3</sup>,  $P_z = 1,4$  hod, (e)  $\rho = 2,5 \cdot 10^{-2}$  kg/m<sup>3</sup>,  $P_z = 9$  dní, (f)  $\rho = 7,2 \cdot 10^{-6}$  kg/m<sup>3</sup>,  $P_z = 530$  d.]

7.11. Dokažte, že minimální perioda světelných změn hvězdy souvisejících s její rotací  $P_{\text{rotmin}}$  je vždy větší než maximální perioda radiálních pulsací  $P_z$ . a) Kolikrát?, b) vypočtete hodnoty

minimální doby otočky pro všechny případy hvězd uvedených v předcházejícím příkladu. Diskutujte.

$$[(a) P_{\text{rotmin}} \approx \frac{3}{\sqrt{G\rho}}, \text{ tedy asi třikrát, (b) } P_{\text{rotmin}} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ s, } P_{\text{rotmin}} = 20 \text{ s, } P_{\text{rotmin}} = 3 \text{ h,}$$

$$P_{\text{rotmin}} = 4 \text{ h, } P_{\text{rotmin}} = 1 \text{ měsíc, } P_{\text{rotmin}} = 4,5 \text{ roku (!)]}$$

- 7.12. Hubblovým kosmickým dalekohledem byla ve spirální galaxii M 100 objevena řada cefeid. Střední hvězdná velikost jedné z nich, C2, je 25,4 mag, přičemž perioda pulsací činí právě 50 dní. Za použití relace mezi periodou a absolutní vizuální hvězdnou velikostí  $M_V$ :  $M_V = -2,80 \log P - 1,43$ , odhadněte, s jakým časovým zpožděním tuto cefeidu pozorujeme. Je nyní C2 ještě cefeidou?

$$[M_V = -6,2 \text{ mag, } r = 20,8 \text{ Mpc} = 68 \text{ milionů sv. let, nejspíš ne.}]$$

- 7.13. Několik měsíců po vzplanutí novy či supernovy se v jejím okolí objevuje světelný prstenec, nazývaný světelné echo. Úhlový poloměr prstence se rovnoměrně zvětšuje tempem  $r''$  obloukových vteřin za rok. a) Jaké je vysvětlení tohoto jevu? b) Jaká je vzdálenost novy či supernovy v pc? c) Lze k změření vzdálenosti využít i rychlosti rozpínání vlastní obálky novy či supernovy? Co musíme navíc ještě znát, a jak tuto veličinu zjistíme?

$$[(b) r[\text{pc}] = \frac{1}{\pi''}, \quad \pi'' = \frac{1 \text{ AU}}{c \text{ 1 rok}} r'', \quad r[\text{pc}] = \frac{c \text{ 1 rok}}{1 \text{ AU}} r'']$$

- 7.14. Expandující obálka supernovy začne být ve svém postupu mezihvězdným prostorem účinně bržděna v okamžiku, kdy začne její hustota být srovnatelná s hustotou mezihvězdné látky v okolí, která činí cca  $10^6$  atomů na  $\text{m}^3$ . Diskutujte expanzi obálky supernovy typu I s hmotností  $1,4 M_{\odot}$ , předpokládáte-li že expanduje souměrně a je složena převážně z atomů uhlíku  $\text{C}_{12}$ . Jaký bude poloměr v okamžiku, kdy bude mít hustotu srovnatelnou s okolím? Kdy se tak stane? Expanzní rychlost necht' je 1000 km/s.

$$[\text{poloměr asi } 1 \text{ pc, za } 1000 \text{ let po výbuchu}]$$

## 8 Fyzika mezihvězdné látky

8.1. Odhadněte celkovou hmotnost mezihvězdné látky v Galaxii za předpokladu, že tvoří disk o průměru 25 kpc a tloušťce 250 pc a její střední hustota představuje  $5 \cdot 10^{-21} \text{ kg m}^{-3}$ . Hmotnost vyjádřete ve hmotnostech Slunce a porovnejte s udávanou hmotností Galaxie.

$$[9 \cdot 10^9 \text{ Sluncí}]$$

8.2. Pro výše uvedenou střední hustotu a směs 70% H a 30% He vypočtete odpovídající koncentraci částic pro případ: a) neionizovaného vodíku a helia, b) zcela ionizovaného vodíku a neionizovaného helia c) molekulárního vodíku a neionizovaného helia.

$$[\text{a) } 2,3 \cdot 10^6 \text{ částic m}^{-3}, \text{ b) } 4,4 \cdot 10^6 \text{ částic m}^{-3}, \text{ c) } 1,3 \cdot 10^6 \text{ částic m}^{-3}]$$

8.3. Otevřená hvězdokupa M 39 o průměru 2 pc, vzdálená od nás 255 pc, se jeví jako objekt o hvězdné velikosti  $m_V = 5,1$  mag. Za předpokladu, že extinkce poblíž roviny Galaxie narůstá v barvě  $V$  zhruba o 1 mag na kpc, vypočtete a) absolutní hvězdnou velikost hvězdokupy  $M_V$ , b) úhlový průměr objektu  $\alpha$ , c) plošnou hvězdnou velikost objektu  $Q$  vyjádřenou v magnitudách na minutu čtvereční. Zjistěte: d) jak by se veličina  $Q$  měnila se změnou vzdálenosti v případě, že by neexistovala extinkce, e) roste-li extinkce o 1 mag na kpc.

$$[\text{a) } M_V = -2 \text{ mag}, \text{ b) } \alpha = 27', \text{ c) } Q = 12 \text{ mag}''^2, \text{ d) } Q = \text{konst.}, \text{ e) } Q = Q_0 + 1 \text{ mag} \left( \frac{r}{1 \text{ kpc}} \right)]$$

8.4. Proč je: a) bezmračná obloha modrá a mraky „bílé“? b) cigaretový kouř namodralý a objekty, pozorované přes něj, nažloutlé?

[a) V případě bezmračné oblohy jde o sluneční světlo rozptýlené Rayleighovým rozptylem na náhodných shlucích molekul vzduchu, kde účinnost rozptylu závisí na  $\lambda^{-4}$ , mraky jsou shlukem vodních kapiček, které jsou natolik velké, že rozptyl na nich není selektivní – mají tedy barvu bílého slunečního světla. b) cigaretový kouř obsahu dielektrické částičky, u nichž se uplatňuje Mieův rozptyl ( $\sim \lambda^{-1}$ ), stejně jako u prachových částiček mezihvězdné látky. Vzhledem k tomu, že zde je více rozptylováno světlo kratších vlnových délek, převládá v rozptýleném světle modrá složka, zatímco při přímém pohledu se jí naopak nedostává.]

8.5. Pro jednoduchost předpokládejte, že účinný průřez prachové částice bude roven geometrickému průřezu kulové částice. Vypočítejte pak: a) Jakou optickou tloušťku má prachový oblak složený z částic o průměru  $0,5 \mu\text{m}$  a prostorové hustotě  $10^{-4}$  částice  $\text{m}^{-3}$ , jímž záření prochází po dráze 1 pc. b) O kolik magnitud se zeslabí světlo hvězdy pozorované přes tento mrak?

[ a) 0,61, b) 0,66 mag]

8.6. Jistá hvězda vzdálená od nás 0,8 kpc je v důsledku mezihvězdné extinkce zeslabena v barvě  $V$  o 1,1 magnitudy. Předpokládejte, že mezihvězdný prach je tvořen sférickými částicemi o poloměru  $0,2 \mu\text{m}$  a že poměr mezi účinným průřezem v barvě  $V$   $\sigma_V$  a geometrickým průřezem  $S$  činí 1,5 ( $\sigma_V/S = 1,5$ ). a) Vypočítejte účinný průřez v barvě  $U$  (365 nm),  $B$  (440 nm),  $V$  (550 nm) a  $K$  (2175 nm) za předpokladu, že je nepřímo úměrný vlnové délce, b) Jaká je optická tloušťka sloupce v barvě  $V$ ? c) Jaký je počet částic prachu ve sloupci o základně  $1 \text{m}^2$  a délce 0,8 kpc ve směru k oné jisté hvězdě? Jakou mají celkovou hmotnost? ( $\rho = 1800 \text{kg m}^{-3}$ ) d) Vypočítejte střední koncentraci prachových částic v příslušném směru. Jaké to odpovídá hustotě? e) Vypočítejte jaký objem prostoru připadá na jednu částici. Jaká je střední vzdálenost dvou sousedních prachových částic? f) Za předpokladu homogenního rozložení částic podél zorného paprsku zjistěte jak se bude měnit extinkce v závislosti na vzdálenosti.

[ a)  $\sigma_U = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{m}^{-2}$ ,  $\sigma_B = 2,4 \cdot 10^{-13} \text{m}^{-2}$ ,  $\sigma_V = 1,9 \cdot 10^{-13} \text{m}^{-2}$ ,  $\sigma_K = 0,5 \cdot 10^{-13} \text{m}^{-2}$ , b) 1,01, c)  $5,4 \cdot 10^{12}$ , 320 mg, d)  $2,2 \cdot 10^{-7} \text{m}^{-3}$ ,  $\rho = 1,3 \cdot 10^{-23} \text{kg m}^{-3}$ , e)  $4,6 \cdot 10^6 \text{m}^3$ , 200 m, f)  $A = 1,4 \text{mag (r/kpc)}$ .]

8.7. Dvě identické hvězdy hlavní posloupnosti spektrálního typu A0 tvoří optickou dvojhvězdu. Jasnější má hvězdnou velikost v barvě  $V$ ,  $m_1 = 5,7 \text{mag}$ , slabší  $m_2 = 10,7 \text{mag}$ . a) Vypočítejte v jakém poměru by byly jejich vzdálenosti  $r_2/r_1$ , pokud bychom zanedbali vliv mezihvězdné extinkce. b) Zjistíte-li, že jasnější ze složek má hvězdnou velikost v  $B$  6,0 mag, jaká by pak byla hvězdná velikost ve  $V_0$  této hvězdy bez extinkce? c) Předpokládáme-li, že v daném směru je rozložení mezihvězdného prachu homogenní, jaký bude potom poměr vzdálenosti  $r_2/r_1$  složek optické dvojhvězdy?

[ a)  $r_2/r_1 = 10$ . b) Pro A0 bez extinkce by měl být barevný index  $(B-V) = 0 \text{mag}$ , je-li přítomna extinkce, pak bude barevný index  $(B-V)$  roven přímo barevnému excesu  $E(B-V)$ , který souvisí s extinkcí v barvě  $V$  vztahem  $A(V) = 3,2 E(B-V) = 0,96 \text{mag}$ , takže  $V_0 = V - A(V) = 4,7 \text{mag}$ , c) poměr vzdáleností vypočítáte z numericky řešitelné rovnice:

$$m_2 - m_1 = 5 \log \left( \frac{r_2}{r_1} \right) + A(V) \left( \frac{r_2}{r_1} \right), \quad r_2/r_1 = 2,84, \text{ což je ovšem výsledek diametrálně odlišný}$$

od situace bez extinkce!]

8.8. V populární literatuře byste se mohli setkat s tvrzením, že centrum Galaxie je zahaleno v oblacích prachu o celkové extinkci 25 magnitud. Co tento údaj znamená? Mohl to někdo změřit?

[Příslušné odhady jsou extrapolací pozorování ve vzdáleném infračerveném oboru, kde jsou hodnoty extinkce měřitelné.]

8.9. Představte si, že v centru Bokovy globule vzdálené 460 pc s celkovou extinkcí v barvě  $V$   $A(V) = 5$  mag, se nachází zbrusu nová hvězda spektrálního typu A0 V ( $M_V = 1,0$  mag). Vypočtěte a) hvězdnou velikost hvězdy v  $B_0$ ,  $V_0$  a  $K_0$  (efektivní vlnová délka 2175 nm) za předpokladu, že extinkci zcela zanedbáme (stav po odfouknutí globule), b) hvězdnou velikost ve  $V$ , barevný index ( $B-V$ ) a barevný exces, c) jaké by pak bylo zbarvení původně čistě bílé hvězdy, d) jaká bude hvězdná velikost v  $K$ . Diskutujte.

[a)  $B_0 = V_0 = K_0 = 9,3$  mag, b)  $V = 14,3$  mag,  $(B-V) = E(B-V) = A(V) / 3,2 = 1,6$  mag,

$B = 15,9$  mag, c) hvězda by se jevila načervenalá. d)  $A(K) = \frac{\lambda(V)}{\lambda(K)} A(V) = 1,3$  mag,

$K = 10,6$  mag.]

8.10. Z kvantové mechaniky plyne, že rotující molekuly mohou nabývat energií:

$$E(K) = K(K+1) E(1)/2,$$

kde  $K$  je tzv. rotační číslo, a  $E(1)$  je minimální možná rotační energie ( $K = 1$ ). Pro přechody mezi rotačními stavy platí výběrové pravidlo:  $\Delta K = \pm 1$ . Najděte předpis pro vlnové délky povolených rotačních přechodů.

$$[\Delta E = (K+1) E(1), \quad \lambda = \frac{c}{E(1)(K+1)}]$$

8.11. Vypočtěte střední volnou dráhu a dobu mezi srážkami neutrálního atomu vodíku v čistě vodíkovém prostředí pro tyto astrofyzikálně důležité případy: a) fotosféra Slunce s hustotou  $\rho = 2,5 \cdot 10^{-4}$  kg m<sup>-3</sup> s teplotou  $T = 5780$  K, b) v difúzních oblacích oblastí H I,  $N = 20$  atomů cm<sup>-3</sup>,  $T = 80$  K, c) v prostoru mezi nimi:  $N = 0,1$  atomů cm<sup>-3</sup>,  $T = 6000$  K.

[a)  $1,9 \cdot 10^{-4}$  m,  $1,6 \cdot 10^{-8}$  s; b) 9,6 AU, 32 let; c) 1900 AU, 740 let]



- 8.12. Pomocí Boltzmannovy rovnice zjistěte jaký je poměr obsazení 2. a 1. energiové hladiny atomu vodíku při střední teplotě difúzních oblaků neutrálního vodíku: 80 kelvinů. Nezapomeňte na statistické váhy hladin. [ $2 \cdot 10^{-642}$  (!)]
- 8.13. Víte-li, že jistý atom při přechodu z jednoho kvantového stavu do druhého vyzářil foton o vlnové délce 0,211 m, vyjádřete rozdíl energií obou kvantových stavů, a) v joulech, b) elektronvoltech, c) pomocí frekvence fotonu. d) Najděte teplotu, při níž je střední energie částice ideálního plynu ( $3/2 kT$ ) rovna této energii. Porovnejte tuto teplotu s běžnou teplotou oblaků v H I oblastech.
- [a)  $9,414 \cdot 10^{-25}$  J, b)  $5,876 \cdot 10^{-6}$  eV, c) 1420 Mhz, d) 0,045 K – je to teplota mnohem nižší než běžná ]
- 8.14. Jakým způsobem lze rozeznat svítící plynnou mlhovinu od nerozlišené hvězdokupy nebo galaxie? K dispozici máte dalekohled se spektrografem.
- [Ve spektru plynné mlhoviny by měly být nejvýraznějšími rysy silné emisní čáry zejména vodíku, ve spektru soustavy, v níž svítí především hvězdy, by mělo být spektrum soustavy spojitě emisní s temnými absorpčními čarami.]
- 8.15. Za předpokladu, že fotosféra horké hvězdy spektrální třídy O6 o efektivní teplotě 42 000 kelvinů září jako absolutně černé těleso, a) vypočtete vlnovou délku maxima jejího vyzařování. Propočtete důsledky nepružné srážky fotonu oné vlnové délky s atomem vodíku v základním stavu, při níž bude tento foton zcela pohlcen. S jakou rychlostí odletí z místa srážky b) proton a c) elektron. d) Která z obou částic si sebou odnáší větší díl kinetické energie? e) Jak se situace změní, jestliže se foton střetne s excitovaným vodíkovým atomem?
- [a) 69 nm, b)  $2,5 \cdot 10^6$  m/s<sup>-1</sup>, c)  $1,4 \cdot 10^3$  m/s<sup>-1</sup>, d) elektron]
- 8.16. V téže části rozměrného homogenního oblaku mezihvězdného plynu se nacházejí dvě velmi horké hvězdy spektrální třídy O6 s ultrafialovým zářivým výkonem  $2,5 \cdot 10^5$  Sluncí a B0 s ultrafialovým výkonem  $2 \cdot 10^4$  Sluncí. Porovnejte pozorované bolometrické hvězdné velikosti jejich oblastí H II a jejich úhlové průměry. [2,7 mag, 2,3:1 ]
- 8.17. Ve spektru jedné nejmenované oblasti H II byla identifikována emisní spektrální čára odpovídající přechodu ze 104. na 103. hladinu vodíku. a) Vypočtete vlnovou délku příslušné spektrální čáry a označte obor elektromagnetického spektra, kde se čára nachází. Podle Bohrova modelu atomu vodíku odhadněte efektivní rozměr vodíkového atomu b) před přechodem a c) po něm. Porovnejte se střední vzdáleností částic v typické H II oblasti – koncentrace je 5000 atomů/cm<sup>3</sup>. [a) 0,05 m, b)  $5,68 \cdot 10^{-7}$  m, c)  $5,57 \cdot 10^{-7}$  m]

## 9 Hvězdy v galaxii

9.1. Adrian van Maanen tvrdil, že pozoruje otáčení řady spirálních mlhovin úhlovou rychlostí až  $0,02''/\text{rok}$ . Porovnejte tuto rychlost s rychlostí otáčení naší Galaxie v místech, kde se nachází naše sluneční soustava.

$$[\text{cca } 5 \cdot 10^{-3} \text{ ''/rok}]$$

9.2. Určete souřadnice tzv. anticentra Galaxie nacházejícího se v opačném směru než je centrum Galaxie. V kterém souhvězdí se toto anticentrum nachází? Jak je možné, že je v této oblasti tak mnoho poměrně jasných hvězd?

$$[\alpha=5^{\text{h}}46^{\text{m}}, \delta=28^{\circ}56', \text{Vozka}]$$

9.3. Zjistěte galaktické souřadnice nejjasnější hvězdy oblohy Siria. Zjistěte vzdálenost hvězdy od galaktické roviny (je nad nebo pod?)

$$[(227,23; -8,89), -0,408 \text{ pc } (\pi = 0,37921'') - \text{pod.}]$$

9.4. Pohybová hvězdokupa Velký vůz se nachází viditelně mimo pás Mléčné dráhy. Z měření družice Hipparcos zjistěte vzdálenost této skupiny hvězd, vzdálenost od roviny Galaxie. Jakou minimální rychlosti by se skupina musela vzhledem k této rovině pohybovat, aby během svého života dospěla tam, kde ji dnes nacházíme. Stáří pohybové hvězdokupy ve Velké medvědici se přitom odhaduje na  $(500 \pm 100) \cdot 10^6$  let.

[Pro určitost zvolíme hvězdu  $\epsilon$  UMa (Alioth). Její vzdálenost je 24,8 pc. Vzdálenost od roviny Galaxie je 21,7 pc. Minimální rychlost je  $42,5 \text{ m s}^{-1}$ .]

9.5. Podle dvouparametrického modelu hala tvořeného temnou hmotou:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + (r/a)^2},$$

kde  $\rho_0 = 5,9 \cdot 10^7 \text{ M}_{\odot} \text{ kpc}^{-3} = 4,0 \cdot 10^{-21} \text{ kg m}^{-3}$  a  $a = 2,8 \text{ kpc}$ , vypočtěte pro vzdálenost Slunce  $r = 8 \text{ kpc}$  hustotu temné látky a její hmotnost obsaženou v objemu naší Země.

$$[\rho = 4,4 \cdot 10^{-22} \text{ kg m}^{-3}, 0,5 \text{ kg (!)}]$$

9.6. Za předpokladu, že naše Galaxie jeví spirální strukturu, kterou lze aproximovat logaritmickou spirálou s úhlem otevření  $\Theta = 10^{\circ}$ :  $r(\varphi) = r(0) \exp(\varphi \text{ tg } \Theta)$ , kde  $r$  a  $\varphi$  jsou běžné polární souřadnice bodu spirály (úhel roste ve směru proti pohybu hodinových ručiček a vyjadřujeme jej v radiánech, přičemž tento úhel může postupně nabývat i hodnot větších než  $2\pi$  radiánů),  $r(0)$  je vzdálenost

bodů spirály pro úhel  $\varphi = 0$  a  $\Theta$  je tzv. *úhel otevření* odpovídající úhlu, který svírá kolmice k průvodiči s tečnou ke spirále, a) odvoďte vztah pro poměr vzdálenosti dvou sousedních závitů téhož spirálního ramene od centra Galaxie. b) Jaký by byl tento poměr, pokud by tato spirální ramena byla 4 a byla rozložena v Galaxii rovnoměrně. c) Jaká by byla vzdálenost mezi sousedními rameny ve vzdálenosti Slunce,  $r(0) = 8$  kpc.

$$\text{[a) } \frac{dr}{d\varphi} = r \operatorname{tg} \Theta; \rightarrow \ln \left( \frac{r(\varphi)}{r(0)} \right) = \varphi \operatorname{tg} \Theta; \frac{r(2\pi)}{r(0)} = \exp(2\pi \operatorname{tg} \Theta). \text{ , pro } \alpha = 10^\circ \text{ je ten}$$

$$\text{poměr } 1:3,03, \text{ b) } 1: \sqrt[4]{3,03} = 1:1,32, \text{ c) } r(0) \left( \sqrt[4]{3,03} - \sqrt[4]{1/3,03} \right) = 0,28 r(0) = 2,2 \text{ kpc ]}$$

9.7. Zjistěte jakou by měla celkovou hvězdnou velikost galaktická výduť, pokud by zde nepůsobila mezihvězdná extinkce. Předpokládejte, že obsahuje asi 20 miliard hvězd, jejich střední absolutní jasnost odpovídá jasnosti Slunce.

$$[-6,8 \text{ mag}]$$

## 10 Hvězdy a vesmír

10.1. Odhadněte jaké následky by měla zcela nepružná srážka dvou mračen neutrálního vodíku o hmotnosti  $m$ , z nichž každé by před kolizí obíhalo po kruhové dráze kolem centra své spirální galaxie rychlostí  $200 \text{ km s}^{-1}$ . Vzájemná rychlost mračen před srážkou necht' je  $v_{\text{sr}} = 1\,000 \text{ km s}^{-1}$ . a) Jaký by byl osud těchto mračen po srážce? b) Jak by se změnila teplota a stav materiálu mračen? c) Porovnejte střední kvadratickou rychlost atomů vodíku v mračnu po srážce s rychlostí srážky. d) Kdyby srážející se galaxie patřily k téže kupě galaxií, došlo by k úniku plynu mračen mimo kupu nebo by tento materiál zůstal součástí kupy?

[a] mračna by se spojila v jedno, to by opustilo obě z galaxií, rychlostí mnohem větší, než

$$2 \frac{1}{2} m \left( \frac{v_{\text{sr}}}{2} \right)^2 = \frac{3}{2} \frac{2 \cdot 2 m}{m_{\text{H}}} k T \rightarrow T = \frac{m_{\text{H}} v_{\text{sr}}^2}{24 k} = 5 \cdot 10^6 \text{ K.}$$

je rychlost úniková. b)

$$\frac{3}{2} k T = \frac{1}{2} \overline{v_{\text{H,e}}^2} \rightarrow \overline{v_{\text{H}}^2} = \frac{v_{\text{sr}}^2}{8}; \quad \overline{v_{\text{e}}^2} = \frac{m_{\text{H}}}{m_{\text{e}}} \overline{v_{\text{H}}^2};$$

10.2. Proberme si vlastnosti IRC 10°216, druhého nejjasnější objektu na infračervené obloze, ve vizuálním oboru známé jako CW Leonis s teplotou fotosféry  $2\,300 \text{ K}$ , poloměrem  $500 R_{\odot}$  a vzdáleností  $650 \text{ sv. let}$ . Vypočtete kolik činí: a) zářivý výkon hvězdy  $L$ , b) absolutní bolometrická hvězdná velikost  $M_{\text{bol}}$ , c) pozorovaná bolometrická hvězdná velikost hvězdy  $m_{\text{bol}}$ , při bolometrické korekci  $BC = 3,5 \text{ mag}$  i d) vizuální hvězdnou velikost hvězdy  $m_{0V}$ , kterou by hvězda měla, pokud by nebyla obklopena takřka neprůhlednou vrstvou prachu o průměru Jupiterovy dráhy  $R_{\text{J}} = 5,2 \text{ AU}$ , a porovnejte se skutečně pozorovanou hvězdnou velikostí hvězdy ( $18 \text{ mag}$ ). Zjistěte e) velikost extinkce v barvě  $V$  a odhadněte její velikost na  $10 \text{ mikrometrech}$ , f) odhadněte efektivní teplotu prachového zámotku hvězdy s tím, že se v něm pohltí veškerý výkon hvězdy, g) odvoďte velikost mlhoviny v úhlových vteřinách a odhadněte, zda by ji bylo možné interferometricky zkoumat.

$$\text{[a]} \left( \frac{L}{L_{\odot}} \right) = \left( \frac{R}{R_{\odot}} \right)^2 \left( \frac{T_{\text{ef}}}{T_{\text{ef}\odot}} \right)^4 = 6300, \text{ b)} \left( \frac{M_{\text{bol}}}{1 \text{ mag}} \right) = 4,750 - 2,5 \log \left( \frac{L}{L_{\odot}} \right) = -4,75,$$

$$\text{c)} m_{\text{bol}} = M_{\text{bol}} - 5 + 5 \log r = 4,31 \text{ mag}, \text{ d)} m_{0V} = m_{\text{bol}} + BC = 7,8 \text{ mag}, \text{ e)} A_V = 10,2 \text{ mag},$$

$$A_{\text{IR}} = A_V \left( \frac{\lambda_V}{\lambda_{\text{IR}}} \right) = 0,56 \text{ mag}, \text{ f)} 1540 \text{ K}, \text{ g)} 0,02'' \text{, snad.]}$$

- 10.3. Vypočítejte koncentraci  $n_f$  a hustotu energie reliktních fotonů  $\varepsilon$  za předpokladu, že se reliktní záření svými vlastnostmi blíží vlastnostem rovnovážného záření absolutně černého tělesa o termodynamické teplotě  $T = 2,725$  K.

$$[n_f = 2,029 \cdot 10^7 T^3 = 4,11 \cdot 10^8 \text{ fotonů m}^{-3}, \varepsilon = \frac{4\sigma}{c} T^4 = 4,17 \cdot 10^{-14} \text{ W m}^{-3}]$$

- 10.4. Za předpokladu, že v současném vesmíru v mezigalaktickém prostoru disky hvězd o střední teplotě  $T_h$  cca 3500 K vykrývají cca  $\eta = 1,5 \cdot 10^{-14}$  část hvězdné oblohy, vypočtete střední hustotu energie hvězdných fotonů  $\varepsilon_h$  a jejich koncentraci v prostoru  $n_{fh}$ . Srovnajte s energií a koncentrací týchž veličin u reliktního záření.

$$[n_{fh} = \eta 2,029 \cdot 10^7 T_h^3 = 1,3 \cdot 10^4 \text{ fotonů m}^{-3}, \varepsilon_h = \eta \frac{4\sigma}{c} T_h^4 = 1,7 \cdot 10^{-15} \text{ W m}^{-3}]$$

- 10.5. Už Planck ukázal, že kombinací tří základních fyzikálních constant – rychlosti světla  $c$ , Planckovy konstanty  $\hbar$  a gravitační konstanty  $G$  lze najít elementární jednotky pro čas (Planckův čas)  $t_p$ , délku (Planckova délka)  $l_p$  a hmotnost  $m_p$ . Najděte jejich hodnoty a posuďte, čeho by se tak asi mohly týkat. Jaký je jejich význam?

$$[l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-35} \text{ m}; \quad t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 10^{-43} \text{ s}; \quad m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{-8} \text{ kg.}]$$

- 10.6. Spočtete Jeansovu hmotu pro případ typického mračna složeného z molekulárního vodíku, ze kterého vznikaly první hvězdy,  $T \approx 200$  K,  $n \approx 10^{10} \text{ m}^{-3}$ .

$$[M_J = \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho} \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^3}, M_J = 700 M_\odot]$$

- 10.7. Odhadněte dobu života na hlavní posloupnosti hvězdy s hmotností  $300 M_\odot$  a zářivým výkonem  $10^7 L_\odot$  pokud předpokládáme, že se veškerý dostupný vodík přemění na hélium.

$$[2 \cdot 10^6 \text{ let}]$$

- 10.8. Určete množství vodíku, které může ionizovat supernova o hmotnosti řádově stovek hmotností slunečních, která uvolní  $10^{46}$  J energie, pokud předpokládáme, že se veškerá uvolněná energie použije na ionizaci vodíku.

$$[4 \cdot 10^6 M_\odot]$$

10.9. Předpokládejte, že poločas rozpadu protonu je  $\tau = 10^{36}$  let. Vypočtěte výkon a efektivní teplotu typické neutronové hvězdy ( $M = 1,2 M_{\odot}$ ,  $R = 12$  km) a černého elektronově degenerovaného trpaslíka ( $M = 0,6 M_{\odot}$ ,  $R = 8\,500$  km) dané tímto rozpadem.

$$\left[ L = \frac{Mc^2}{\ln 2 \tau} = 1,7 \cdot 10^6 \text{ W}; \quad 9 \cdot 10^5 \text{ W}; \quad T_{\text{ef}} = \sqrt[4]{\frac{L}{4\pi R^2 \sigma}} = 11 \text{ K}; \quad 0,3 \text{ K}. \right]$$